4. Σειρές Τέηλορ και Μακλώριν

4.1 Το θεώρημα του Τέηλορ

Το *θεώρημα του Τέηλορ* (Taylor) μάς δίνει τη δυνατότητα να αναπτύσσουμε συναρτήσεις ως δυναμοσειρές. Μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Αν η $f(x)$ *είναι μια συνεχής μονότιμη συνάρτηση του* x *με συνεχείς παραγώγους* $f'(x)$, $f''(x)$, …, $f^{(n)}(x)$ *στο διάστημα* $a \le x \le b$, *και η* $f^{(n+1)}(x)$ *υπάρχει στο* $a < x < b$, *τότε*

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n + R_n(x) \qquad (4.1)$$

όπου $R_n(x) = \dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$ *και* $a < \xi < x$.

Το $R_n(x)$ είναι το *υπόλοιπο* της συνάρτησης μετά τη $n-$οστή δύναμη του $(x-a)$.
Αν $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, τότε

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \ldots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r)}(a)(x-a)^r \qquad (4.2)$$

Θέτοντας $x \to a + x$, έχουμε την ισοδύναμη μορφή

$$f(a+x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)\, x + \frac{1}{2!} f''(a)\, x^2 + \ldots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r)}(a)\, x^r \qquad (4.3)$$

Οι δύο αυτές σειρές ονομάζονται *σειρές Τέηλορ*.
Για $a = 0$

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0)\, x + \frac{1}{2!} f''(0)\, x^2 + \ldots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r)}(0)\, x^r \qquad (4.4)$$

η οποία είναι γνωστή ως *σειρά Μακλώριν* (Maclaurin).

4.1.1 Απόδειξη του θεωρήματος του Τέηλορ

Μια απλή απόδειξη του θεωρήματος του Τέηλορ, η οποία όμως δεν εξετάζει το θέμα του υπολοίπου, είναι η ακόλουθη: Έστω ότι

$$f(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + A_3(x-a)^3 + \ldots \qquad \text{όπου} \quad A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3, \ldots = \text{σταθερές.}$$

Τότε, με παραγώγιση, βρίσκουμε ότι

$$f'(x) = A_1 + 2A_2(x-a) + 3A_3(x-a)^2 + \ldots$$

$$f''(x) = 2A_2 + 3\cdot 2A_3(x-a) + 4\cdot 3A_4(x-a)^2 + \ldots$$

$$f'''(x) = 3!A_3 + 4!A_4(x-a) + \ldots$$

και γενικά,

$$f^{(n)}(x) = n!A_n + (n+1)!A_{n+1}(x-a) + \text{όροι με ανώτερες δυνάμεις του } (x-a). \qquad (4.5)$$

Θέτοντας $x = a$ έχουμε τις σχέσεις

$$f(a) = A_0 \qquad f'(a) = A_1 \qquad f''(a) = 2!A_2 \qquad f'''(a) = 3!A_3 \qquad \ldots\ldots \qquad f^{(n)}(a) = n!A_n$$

από τις οποίες βρίσκουμε τους συντελεστές στη σειρά Τέηλορ για την $f(x)$:

$$A_0 = f(a) \qquad A_1 = f'(a) \qquad A_2 = \frac{1}{2!} f''(a) \qquad A_3 = \frac{1}{3!} f'''(a) \qquad \ldots.. \qquad A_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$$

4.2 Οι σειρές Τέηλορ και Μακλώριν μερικών κοινών συναρτήσεων

Συνοψίζουμε τους τύπους που χρησιμοποιούνται στην ανάπτυξη συναρτήσεων σε σειρές Τέηλορ και Μακλώριν:

$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0)\, x + \frac{1}{2!} f''(0)\, x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)\, x^3 + \ldots$	Ανάπτυγμα Μακλώριν (γύρω από το σημείο $x = 0$)
$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!} f'''(a)(x-a)^3 + \ldots$	Αναπτύγματα Τέηλορ γύρω από το σημείο $x = a$
$f(a+x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)\, x + \frac{1}{2!} f''(a)\, x^2 + \frac{1}{3!} f'''(a)\, x^3 + \ldots$	

Θα εφαρμόσουμε τους τύπους αυτούς για να εξαγάγουμε δυναμοσειρές για κάποιες κοινές συναρτήσεις.

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η σειρά Μακλώριν για τη συνάρτηση e^x.

Επειδή $f(x) = e^x$ και $f(x) = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = \ldots = e^x$, έχουμε:

$f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = \ldots = 1$. Επομένως,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί η σειρά Μακλώριν για τη συνάρτηση $\sin x$.

Επειδή $f(x) = \sin x$ και

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad f^{(4)}(x) = \sin x, \ \ldots,$$

έχουμε

$$f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad f^{(4)}(0) = 0, \quad f^{(5)}(0) = 1, \quad f^{(6)}(0) = 0, \quad f^{(7)}(0) = -1, \ \ldots$$

και επομένως
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Παράδειγμα 3

Να βρεθεί η σειρά Τέηλορ για τη συνάρτηση $\ln(1+x)$.

Από την εξίσωση $f(a+x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)\, x + \frac{1}{2!} f''(a)\, x^2 + \frac{1}{3!} f'''(a)\, x^3 + \ldots$, με $a = 1$ έχουμε

$$f(1+x) = f(1) + \frac{1}{1!} f'(1)\, x + \frac{1}{2!} f''(1)\, x^2 + \frac{1}{3!} f'''(1)\, x^3 + \ldots$$

Για $f(x) = \ln x$ έχουμε: $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f'''(x) = \frac{2}{x^3}$, $f^{(4)}(x) = -\frac{2 \cdot 3}{x^4}$, ...

Έτσι είναι $f(1)=0$ και $f'(1)=1,\quad f''(1)=-1,\quad f'''(1)=2,\quad f^{(4)}(1)=-2\cdot 3,\ \ldots$

ή, γενικά,
$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n} \quad \text{για} \quad n>0 .$$

Επομένως $f(1)=0$ και $f^{(n)}(1)=(-1)^{n-1}(n-1)!$ για $n>0$,

και
$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

Οι δυναμοσειρές για κάποιες κοινές συναρτήσεις δίνονται στον πίνακα που ακολουθεί:

$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\ldots$	για κάθε x
$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\ldots$	για κάθε x (σε ακτίνια)
$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\ldots$	για κάθε x (σε ακτίνια)
$\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\ldots$	για $-1<x\le 1$
$\sinh x=x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\dfrac{x^7}{7!}+\ldots$	για κάθε x
$\cosh x=1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\dfrac{x^6}{6!}+\ldots$	για κάθε x

Χρήσιμα αναπτύγματα διωνύμων είναι τα εξής:

$(1+x)^n=1+nx+\dfrac{n(n-1)}{2!}x^2+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\ldots$	Για κάθε x, αν το n είναι θετικός ακέραιος. Η σειρά έχει $n+1$ όρους.
$(1+x)^a=1+ax+\dfrac{a(a-1)}{2!}x^2+\dfrac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3+\ldots$	για $\lvert x\rvert<1$ και κάθε πραγματικό a
$\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots$	για $\lvert x\rvert<1$
$\dfrac{1}{(1+x)^2}=1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-\ldots$	για $\lvert x\rvert<1$
$\sqrt{1+x}=1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1\cdot 1}{2\cdot 4}x^2+\dfrac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\dfrac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+\ldots$	για $\lvert x\rvert\le 1$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4-\ldots$	για $\lvert x\rvert<1$

4.3 Υπολογισμός ορίων μέσω των σειρών Τέηλορ και Μακλώριν

Αν ζητείται το όριο $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ δύο συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$, γράφουμε

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(a)+\frac{1}{1!}f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+\ldots}{g(a)+\frac{1}{1!}g'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}g''(a)(x-a)^2+\ldots}$$

οπότε,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}\left[f(a)+\frac{1}{1!}f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+\ldots\right]}{\lim\limits_{x\to a}\left[g(a)+\frac{1}{1!}g'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}g''(a)(x-a)^2+\ldots\right]} \tag{4.6}$$

Αυτή η σχέση δίνει $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(a)}{g(a)}$, εκτός εάν ο λόγος αυτός είναι της μορφής $\dfrac{f(a)}{g(a)}=\dfrac{0}{0}$. Τότε, η σχέση μάς δίνει $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(a)}{g'(a)}$. Αν και αυτός ο λόγος είναι απροσδιόριστος, χρησιμοποιούμε τις αμέσως επόμενες παραγώγους, κ.ο.κ. Η επαναλαμβανόμενη αυτή διαδικασία μπορεί να διατυπωθεί γενικά ως εξής:

$$\text{Εάν ο λόγος } \frac{f(a)}{g(a)} \text{ είναι της μορφής } \frac{0}{0}, \text{ τότε } \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{4.7}$$

που είναι ο γνωστός *κανόνας του ντε λ' Οπιτάλ (de l' Hospital)*. Η χρήση του κανόνα του ντε λ' Οπιτάλ δεν είναι απαραίτητη αν χρησιμοποιήσουμε αναπτύγματα σε σειρές, όπως φαίνεται στα παραδείγματα που ακολουθούν. Αν το όριο ζητείται για $x\to a$ χρησιμοποιούμε τις αντίστοιχες σειρές Τέηλορ για τις $f(x)$ και $g(x)$, ενώ για το όριο $x\to 0$ χρησιμοποιούμε τις σειρές Μακλώριν.

Παράδειγμα 4

Ο λόγος $\dfrac{\sin ax}{x}$ γράφεται, με τη βοήθεια της σειράς Μακλώριν για το ημίτονο, ως

$$\frac{\sin ax}{x}=\frac{1}{x}\left(ax-\frac{(ax)^3}{3!}+\frac{(ax)^5}{5!}\ldots\right)=a-\frac{a^3x^2}{3!}+\frac{a^5x^4}{5!}\ldots$$

και επομένως, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}=a$.

Παράδειγμα 5

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots-1-x\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2!}+\frac{x}{3!}+\ldots\right)=\frac{1}{2}$$

4.4 Προσεγγίσεις

Οι σειρές Τέηλορ και Μακλώριν μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να δώσουν προσεγγίσεις συναρτήσεων, απλοποιώντας έτσι τη λύση πολύπλοκων προβλημάτων. Ένα παράδειγμα θα επιδείξει τη μέθοδο:

Παράδειγμα 6

Η εξίσωση κίνησης του απλού εκκρεμούς βρίσκεται ότι είναι $L\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta$, όπου L είναι το μήκος του εκκρεμούς, g η επιτάχυνση της βαρύτητας και θ η γωνία περιστροφής του εκκρεμούς από την προς τα κάτω κατακόρυφη κατεύθυνση. Να βρεθεί η λύση $\theta(t)$.

Η πλήρης λύση $\theta(t)$ μπορεί να βρεθεί, αλλά συναρτήσει πολύπλοκων συναρτήσεων, των *ελλειπτικών ολοκληρωμάτων*. Μια απλή και εύχρηστη λύση μπορεί να βρεθεί αν εξετάζουμε μόνο το πρόβλημα των ταλαντώσεων μικρού πλάτους. Τότε, η σειρά για το ημίτονο

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots$$

μας δίνει, για μικρές τιμές του θ, $\sin\theta \approx \theta$.

Έτσι, η εξίσωση κίνησης μπορεί να γραφτεί, για ταλαντώσεις μικρού πλάτους, ως

$$L\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\theta \;, \quad \text{ή} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega_0^2\theta, \quad \text{όπου } \omega_0^2 \equiv \frac{g}{L}.$$

Η λύση αυτής της διαφορικής εξίσωσης είναι,

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \phi) \;, \qquad \theta_0, \phi = \text{σταθερές}$$

όπως μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε με παραγώγιση. Μπορεί να δειχθεί ότι, για πλάτος μικρότερο των 10°, η περίοδος των ταλαντώσεων $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, όπως βρέθηκε με την προσέγγιση που χρησιμοποιήθηκε, διαφέρει από την ακριβή τιμή κατά λιγότερο από 0,2 %.

4.4.1 Χρήσιμες προσεγγίσεις των κοινών συναρτήσεων

Για μικρές τιμές του ορίσματος, μπορούμε να βρούμε, από τις σειρές Τέηλορ και Μακλώριν για τις κοινές συναρτήσεις, τις ακόλουθες προσεγγίσεις:

$e^x \approx 1 + x$	$\ln(1+x) \approx x$	$\ln(a+x) \approx \ln a + \frac{x}{a}$
$\sin x \approx x$	$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$	$\tan x \approx x$
$(1+x)^n \approx 1 + nx$	$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$	$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$

Οι προσεγγίσεις που δίνονται στον πίνακα μπορούν να θεωρηθούν ως *πρώτες προσεγγίσεις*. Μια *δεύτερη προσέγγιση* θα περιελάμβανε ακόμα έναν όρο στην καθεμιά. Για παράδειγμα, $e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2$. Ο βαθμός της προσέγγισης που χρησιμοποιείται εξαρτάται από το συγκεκριμένο πρόβλημα και την επιθυμητή ακρίβεια στη λύση του.

Τα ακριβή όρια του σφάλματος δίνονται από την έκφραση για το $R_n(x)$ στο θεώρημα του Τέηλορ. Ως μια πρόχειρη εκτίμηση για το σφάλμα που γίνεται κατά την προσέγγιση μπορεί να ληφθεί ο πρώτος παραλειπόμενος όρος. Έτσι, το σφάλμα στην προσέγγιση $\sin x \approx x$ είναι μικρότερο από $\frac{1}{6}x^3$. Κάποια παραδείγματα αριθμητικών υπολογισμών δίνονται παρακάτω.

Παράδειγμα 7

Να υπολογιστεί προσεγγιστικά το $e^{0,1}$.

Από την προσεγγιστική σχέση $e^x \approx 1+x$, έχουμε $e^{0,1} \approx 1+0,1 = 1,1$.
Ο πρώτος παραλειπόμενος όρος $\frac{1}{2}x^2$ έχει τιμή ίση με $\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}0,1^2 = 0,005$, που αποτελεί μια εκτίμηση του σφάλματος που κάναμε στην προσέγγιση. Με μεγαλύτερη ακρίβεια, είναι $e^{0,1} = 1,10517...$. Το πραγματικό σφάλμα είναι επομένως 0,00517.

Παράδειγμα 8

Να υπολογιστεί προσεγγιστικά το $\sin 10^{\text{o}}$.

Στην προσέγγιση $\sin x \approx x$, η τιμή της γωνίας σε ακτίνια είναι $x = 2\pi \dfrac{10^{\text{o}}}{360^{\text{o}}} = 0,1745$ rad.

Έτσι, $\sin 10^{\text{o}} = \sin 0,1745 \approx 0,1745$.

Η πρόχειρη εκτίμηση του σφάλματος είναι $\frac{1}{6}x^3 = \frac{1}{6}(0,1745)^3 = 0,000886$. Η ακριβής τιμή είναι $\sin 10^{\text{o}} = 0,1736$. Το πραγματικό σφάλμα είναι ίσο με 0,000885, ή 0,5 %.

Παράδειγμα 9

Να βρεθεί μια σχέση για τη μεταβολή της επιτάχυνσης της βαρύτητας για μικρά ύψη πάνω από την επιφάνεια της Γης.

Το βάρος ενός σώματος μάζας m που βρίσκεται σε απόσταση r από το κέντρο της Γης είναι $B = G\dfrac{Mm}{r^2}$, όπου M είναι η μάζα της Γης. Η επιτάχυνση της βαρύτητας στην απόσταση r είναι επομένως ίση με $g(r) = G\dfrac{M}{r^2}$. Αν το ύψος πάνω από την επιφάνεια της Γης συμβολίζεται με y, θα είναι $r = R + y$, όπου R είναι η ακτίνα της Γης. Επομένως,

$$g(y) = G\frac{M}{(R+y)^2} = \frac{GM}{R^2}\frac{1}{[1+(y/R)]^2} \qquad \text{ή} \qquad g(y) = \frac{g_0}{[1+(y/R)]^2},$$

όπου $g_0 = \dfrac{GM}{R^2}$ είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης.

Η φράση ‘μικρά ύψη πάνω από την επιφάνεια της Γης’ σημαίνει $y << R$. Αναπτύσσοντας τον παράγοντα $[1+(y/R)]^{-2}$ σε σειρά δυνάμεων του y/R, βρίσκουμε:

$$\left[1+\left(\frac{y}{R}\right)\right]^{-2} = 1 - 2\left(\frac{y}{R}\right) + 3\left(\frac{y}{R}\right)^2 - ...$$

Επομένως, σε πρώτη προσέγγιση, είναι: $g(y) \approx g_0[1 - 2y/R]$.

Παράδειγμα 10

Φόρτιση πυκνωτή. Ένας πυκνωτής χωρητικότητας C, τοποθετείται τη χρονική στιγμή $t=0$ σε σειρά με μια αντίσταση R και μια πηγή σταθερής τάσης V. Η εξίσωση που περιγράφει τη μεταβολή, συναρτήσει του χρόνου t, του φορτίου Q του πυκνωτή είναι $Q = CV\left(1 - e^{-t/RC}\right)$.

Δείξτε ότι για μικρές τιμές του t το φορτίο του πυκνωτή μεταβάλλεται γραμμικά με το χρόνο.

Αναπτύσσοντας το εκθετικό σε σειρά δυνάμεων του t, έχουμε:

$$Q = CV\left(1 - e^{-t/RC}\right) = CV\left[1 - \left(1 - \frac{t}{RC} + \frac{1}{2!}\frac{t^2}{(RC)^2} - ...\right)\right]$$

ή $$Q = CV\left(\frac{t}{RC} - \frac{1}{2!}\frac{t^2}{(RC)^2} + ...\right) =$$

$$= \frac{V}{R}t\left(1 - \frac{t}{2RC} + ...\right) = \frac{V}{R}t\left(1 - \frac{t}{2RC} + \text{ανώτερες δυνάμεις του } \frac{t}{RC}\right).$$

Για τιμές του χρόνου $t << RC$, είναι $Q \approx \frac{V}{R}t$ ή $Q \propto t$, ό.έ.δ.

Προβλήματα

1 Εξαγάγετε τις σειρές Τέηλορ ή Μακλώριν για κάποιες από τις συναρτήσεις των Πινάκων.

2 Η θέση $x(t)$ ενός σώματος που κινείται υπό την επίδραση σταθερής δύναμης και υφίσταται δύναμη τριβής ανάλογη της ταχύτητάς του δίνεται από τη σχέση

$$x = x_0 + \upsilon_0\tau\left(1 - \frac{\tau F_0}{M\upsilon_0}\right)\left(1 - e^{-t/\tau}\right) + \frac{\tau F_0}{M}t$$

όπου t είναι ο χρόνος και όλα τα άλλα μεγέθη είναι σταθερά. Βρέστε την εξάρτηση του $x(t)$ από το χρόνο για μικρές τιμές του t, αναπτύσσοντας τη συνάρτηση σε σειρά δυνάμεων του t και διατηρώντας μόνο τους όρους μέχρι και t^2. Να βρείτε επίσης τη μορφή της $x(t)$ καθώς $\tau \to \infty$.

3 Η δυναμική ενέργεια ενός σώματος μάζας m που βρίσκεται σε απόσταση r από το κέντρο της Γης είναι ίση με $U(r) = -GMm/r$, όπου M είναι η μάζα της Γης. Να βρεθεί μια προσεγγιστική σχέση για τη δυναμική ενέργεια $U(y)$ συναρτήσει του ύψους y του σώματος πάνω από την επιφάνεια της Γης, για μικρά ύψη, και λαμβάνοντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας την επιφάνεια της Γης.

Βιβλιογραφία

I. S. Sokolnikoff και R. M. Redheffer, *Μαθηματικά για Φυσικούς και Μηχανικούς*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2001. Κεφ. 1.

M. R. Spiegel, *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις ΕΣΠΙ, Αθήνα, 1982. Κεφ. 4.